Clasa a XI-a

Problema 3

Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ cu proprietatea $A^2 = I_n$. Să se arate că există $X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ astfel încât:

$X + Y = I_n$, $AX = X$ și $AY = -Y$.

GM 11/2010.

Soluție

Din $A^2 = I$ rezultă $(\det A)^2 = 1 \neq 0 \Rightarrow A$ este inversabilă și $A^{-1} = A$. — 2 puncte.

Deci $X + Y = I_n \Rightarrow AX - AY = I_n$

$\Rightarrow A(X - Y) = I_n$ — 1 punct

$\Rightarrow X - Y = A$ — 1 punct

Din $\begin{cases} X - Y = A \\ X + Y = I \end{cases}$ — 1 punct

rezultă $X = \frac{1}{2}(I + A)$ — 1 punct

$Y = \frac{1}{2}(I - A)$ — 1 punct